Equations Différentielles Ordinaires

I. Introduction

En mathématiques, une équation différentielle ordinaire (parfois simplement appelée équation différentielle et abrégée en EDO) est une équation différentielle dont la ou les fonctions inconnues ne dépendent que d'une seule variable; elle se présente sous la forme d'une relation entre ces fonctions inconnues et leurs dérivées successives.

F(x ; y ; y' ; y'' ; ... ; y (n)) = 0

L'ordre d'une équation différentielle correspond au degré maximal de dérivation auquel l'une des fonctions inconnues a été soumise.

Exemples des équations différentielles premier ordre :
y'(t) + 2y(t) = 0
y'(t) + 2y(t) = t^2-2t+3

Exemples des équations différentielles second ordre :
y''(t) + 3y(t) = 4t

II. Types de problèmes différentiels

Deux types de problèmes différentiels à résoudre :

1. Conditions initiales données pour une seule valeur t_0 de t, par exemple :

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0, \ \ldots \quad , \quad y^{(n-1)}(t_0) = y_0^{(n-1)}$$

⇨ Problème de conditions initiales ou de Cauchy

2. Conditions données pour des valeurs distinctes de la variable indépendante t, par exemple :

$$y(t_0) = y_0, \quad y(t_1) = y_1, \ \ldots \quad , \quad y(t_{n-1}) = y_{n-1}$$

⇨ Problème de conditions aux limites (non traité dans ce cours).

III. Problème de Cauchy

En analyse, un problème de Cauchy est un problème constitué d'une équation différentielle dont on recherche une solution vérifiant une certaine condition initiale. Cette condition peut prendre plusieurs formes selon la nature de l'équation différentielle. Pour une condition initiale adaptée à la forme de l'équation différentielle, le **théorème de Cauchy-Lipschitz** assure l'existence et l'unicité d'une solution au problème de Cauchy.

$$\begin{cases} y' = F(y,t) \\ y(t0) = y0 \end{cases}$$

<u>Résolution du problème de Cauchy :</u>

Si F est linéaire, on y trouve souvent une solution analytique, exemple :

Pour y'(t)=y et $y(t_0)=y_0$ la solution est $y(t) = y_0e^t$

Si F est non linéaire on fait recours aux méthodes de résolution numériques.

IV. Résolution numérique des équations différentielles

Méthode :

1. Résolution numérique approchée sur l'intervalle I=[t_0, t_0 + T] de longueur T (durée de simulation)
2. Discrétisation par découpage de l'intervalle de I selon un pas constant h,
3. Échantillonnage de la solution aux instants $t_i = t_0 + i\,h$ pour 1 <= i <= n ou $t_{i+1}=t_i+h$.
4. Finalement, la méthode numérique renvoie une liste (y_0,y_1,,...,y_N) contenant les valeurs approchées de $y(t_n)$ pour les différents instants t_n.

À chaque pas de la boucle, pour calculer $y(t_{i+1})$, on peut s'appuyer :

— sur la dernière valeur calculée $y(t_i)$: méthodes à un pas

— sur plusieurs valeurs $y(t_{i-k})$ (k >= 0) antérieurement calculées : méthodes à plusieurs pas (initialisation nécessaire par méthode à un pas)

Exemples des méthodes numériques à un pas :

Premier ordre :

- Méthode d'Euler progressive (explicite)
- Méthode d'Euler rétrograde (implicite)

Deuxième ordre :

- Méthode du point milieu
- Méthode d'Euler modifiée
- Méthode de Heun

Méthodes de Runge Kutta :

- Méthode de Runge Kutta d'ordre 3
- Méthode de Runge Kutta d'ordre 4

Exemples des méthodes numériques à pas multiple :

Méthodes d'Adams :

- Adams Bashforth
- Adams Moulton

Méthodes adaptatives :

- Runge Kutta Fehlberg

Méthodes d'extrapolation de Gragg

V. Méthode Euler

Principe de l'approximation numérique : comme t_{i+1}-t_i est petit :

$$\frac{y(t_{i+1}) - y(t_i)}{t_{i+1} - t_i} \approx y'(t_i) = F(y(t_i), t_i)$$

En utilisant les notation y_i et y_{i+1} :

$$\frac{y_{i+1} - y_i}{t_{i+1} - t_i} \approx F(y_i, t_i)$$

Ce qui donne :

$$y_{i+1} = y_i + (t_{i+1} - t_i) * F(y_i, t_i)$$

On pose h=$t_{i+1} - t_i$ (le pas)

$$y_{i+1} = y_i + h * F(y_i, t_i)$$

VI. Méthode Euler pour la résolution des équations différentiels d'ordre 1

<u>Exercice N° 1:</u>

On souhaite résoudre des équations scalairess du type :

$Y' = f(y,t)$ pout $t \in [t_0, t_N]$ avec $y_0=y(t_0)$

Q1- Ecrire une fonction « **euler1d(f, y0, t0, tN, N)** » permettant de résoudre cette équation par la méthode d'Euler en découpant l'intervalle en N pas de temps pour une fonction f à fournir. La fonction renverra les valeurs de la fonction yn sous forme d'un tableau numpy.

On s'intéresse d'abord à l'équation $y' = y$ avec $y(t_0=0)=1$ et pour laquelle on dispose d'une solution exacte $y=y_0e^t$

Q2 - Ecrire une fonction « **cauchy1d(y, t)** » qui joue le rôle de la fonction f(y,t) associé à ce problème de Cauchy.

Q3- Tester la résolution pour différentes valeurs de N sur l'intervalle [0, 10]. Pour cela on crée une fonction « comparaison(f, y0, t0, tN, N) » qui :

- Calcule la solution numérique approchée et exacte ;
- Calcule la solution avec la fonction odeint du module scipy
- Calcule et renvoie l'erreur globale ;
- Superpose le graphe de la solution approchée à celui de la solution exacte.

VII. Méthode Euler pour la résolution des équations différentiels d'ordre 2

Les équations différentielles d'ordre 2 peuvent toujours être transformée en un système d'équations différentielles d'ordre 1.

On considère le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} x'' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

On pose $y=x'$, alors : $x'' = f(x, t) \Leftrightarrow y' = f(x,t)$

On obtient le problème de Cauchy d'ordre 1 :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = f(x,t) \\ x(t_0) = x_0 \\ x'(t_0) = y_0 \end{cases}$$

En utilisant une notation vectorielle de ce système, on obtient :

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Et :

$$F(X,t) = \begin{bmatrix} y \\ f(x,t) \end{bmatrix}$$

Et :

$$X_0 = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix}$$

Exercice N° 2 :

On s'intéresse maintenant à une équation d'ordre 2, celle du pendule sans frottements :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin\theta = 0 \quad \text{avec} \quad \theta(t_0) = \theta_0 \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t_0) = \dot{\theta}_0$$

Q1 – Reformuler cette équation sous la forme d'un problème de Cauchy de dimension 2.

Q2 – En adaptant cauchy1d(y, t) et euler1d(f, y0, t0, tN, N), construire des fonction **cauchy2d(Y,t)** et **euler2d(F, Y0,t0,tN, N)** permettant de résoudre cette équation par la méthode d'Euler.

Q3 – Tester la résolution sur le cas de l'approximation des petites oscillations (oscillateur harmonique) pour lequel on dispose d'une solution exacte. On prendra $\omega_0 = 2\pi\,\text{rad.s}^{-1}$ (donc T_0=1s), et on choisira par exemple le cas simple où $\dot{\theta}_0 = 0$. Ou pourra modifier la fonction comparaison.